

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Leipzig

Jahr: 1889

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0033

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0033

LOG Id: LOG_0021

LOG Titel: Ueber die Endlichkeit des Invariantensystems für binäre Grundformen

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber die Endlichkeit des Invariantensystems für binäre Grundformen.

Von

DAVID HILBERT in Königsberg.

P. Gordan hat zuerst bewiesen, dass es für ein vorgelegtes System von binären Grundformen eine endliche Zahl von Invarianten giebt, durch welche sich jede andere Invariante jener Grundformen rational und ganz ausdrücken lässt. Im Folgenden wird für diesen fundamentalen Satz ein anderer Beweis erbracht, welcher mit dem ursprünglichen Verfahren von P. Gordan*) nahe Analogien aufweist, während andererseits der Gedankengang dem von F. Mertens**) gegebenen Beweise parallel läuft.

Der Beweis stützt sich auf die beiden folgenden bekannten und leicht beweisbaren Theoreme:

I.

Ein System von beliebig vielen linearen und homogenen diophantischen Gleichungen besitzt eine endliche Anzahl positiver Lösungen von der Beschaffenheit, dass jede andere positive Lösung sich mit Hilfe positiver ganzzahliger Coefficienten linear und homogen aus jenen zusammensetzen lässt.***)

II.

Bildet man aus N beliebigen Grössen ω, \dots die Summe ihrer $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \dots, N^{\text{ten}}$ Potenzen, wie folgt:

$$\omega + \dots, \quad \omega^2 + \dots, \quad \dots, \quad \omega^N + \dots$$

und bedeutet p irgend eine positive ganze Zahl, so gilt stets eine Identität von der Gestalt:

*) Vorlesungen über Invariantentheorie. Bd. II, pag. 231.

**) Crelle's Journal Bd. 100, p. 223.

***) Vergl. P. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie. Bd. I, pag. 199.

$$(1) \quad \omega^p = G + G^{(1)}\omega + \cdots + G^{(N-1)}\omega^{N-1}.$$

wo $G, G^{(1)}, \dots, G^{(N-1)}$ ganze Functionen jener N Potenzsummen sind.

Beide Theoreme sind dem in Rede stehenden Invariantensatze insofern gleichgeartet, als sie ebenso wie jener die Endlichkeit gewisser in sich geschlossener Systeme behaupten. Zugleich weisen wir auf den Umstand hin, dass in beiden Theoremen die charakteristische Reductionsgleichung die einzelnen Glieder des geschlossenen Systems in linearer Weise enthält.

Die vorgelegte Grundform f von der n^{ten} Ordnung in den homogenen Variablen x, y stelle man als Product ihrer Linearfactoren dar, wie folgt:

$$f = (\alpha^{(1)}x + \beta^{(1)}y)(\alpha^{(2)}x + \beta^{(2)}y) \cdots (\alpha^{(n)}x + \beta^{(n)}y)$$

und benutze die Abkürzung:

$$(k, l) = \alpha^{(k)}\beta^{(l)} - \alpha^{(l)}\beta^{(k)}.$$

Jede Invariante der Form f setzt sich bekanntermassen zusammen aus symmetrischen Gebilden von der Gestalt:

$$(2) \quad J = (1, 2)^{e^{1,2}} (1, 3)^{e^{1,3}} (2, 3)^{e^{2,3}} \cdots (n-1, n)^{e^{n-1,n}} + \cdots,$$

wo man die folgenden Glieder der Summe aus dem hingeschriebenen Anfangsgliede dadurch erhält, dass man die in den Klammern stehenden Zahlen $1, 2, \dots, n$ auf alle möglichen Weisen permutirt. Ueberdies ist jedoch erforderlich, dass in jenem Anfangsgliede jede der Zahlen $1, 2, \dots, n$ gleich oft vorkommt, d. h. es bestehen für die als Potenzexponenten auftretenden positiven ganzen Zahlen nothwendig die Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{aligned} & e^{1,2} + e^{1,3} + \cdots + e^{1,n} \\ & = e^{2,1} + e^{2,3} + \cdots + e^{2,n} \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & = e^{n,1} + e^{n,2} + \cdots + e^{n,n-1}, \end{aligned}$$

wo allgemein $e^{k,l}$ und $e^{k,k}$ dieselben Zahlen sind.

Nach Satz I lässt sich jede positive Lösung der diophantischen Gleichungen (3) aus einer gewissen endlichen Anzahl m von speciellen positiven Lösungen linear und homogen unter Vermittelung ganzzähliger positiver Coefficienten p_1, p_2, \dots, p_m zusammensetzen, wie folgt:

$$(4) \quad \begin{aligned} e^{1,2} & = p_1 e_1^{1,2} + p_2 e_2^{1,2} + \cdots + p_m e_m^{1,2}, \\ e^{1,3} & = p_1 e_1^{1,3} + p_2 e_2^{1,3} + \cdots + p_m e_m^{1,3}, \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e^{n-1,n} & = p_1 e_1^{n-1,n} + p_2 e_2^{n-1,n} + \cdots + p_m e_m^{n-1,n}. \end{aligned}$$

Wir bedienen uns der Abkürzungen:

$$(5) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= (1,2)^{e_1^{1,2}} (1,3)^{e_1^{1,3}} (2,3)^{e_1^{2,3}} \cdots (n-1, n)^{e_1^{n-1,n}}, \\ \omega_m &= (1,2)^{e_m^{1,2}} (1,3)^{e_m^{1,3}} (2,3)^{e_m^{2,3}} \cdots (n-1, n)^{e_m^{n-1,n}}, \end{aligned}$$

und bilden sämmtliche Invarianten von der Gestalt:

$$(6) \quad J_{\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_m} = \omega_1^{\pi_1} \omega_2^{\pi_2} \cdots \omega_m^{\pi_m} + \cdots,$$

wo keiner der Zahlenexponenten $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ die Zahl

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

überschreitet und wo die folgenden Glieder der Summe auf gleiche Weise wie oben in (2) aus dem Anfangsgliede abzuleiten sind.

Aus jedem der m Producte (5) gehen durch Permutation der in den Klammern stehenden Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ noch $N - 1$ weitere Ausdrücke hervor; daher gelten, entsprechend der Reductionsformel (1) in Satz II, Gleichungen der folgenden Art:

$$(7) \quad \begin{aligned} \omega_1^{p_1} &= G_1 + G_1^{(1)} \omega_1 + \cdots + G_1^{(N-1)} \omega_1^{N-1}, \\ \omega_m^{p_m} &= G_m + G_m^{(1)} \omega_m + \cdots + G_m^{(N-1)} \omega_m^{N-1}, \end{aligned}$$

wo die Coefficienten G ganze Functionen der Potenzsummen:

$$(8) \quad \begin{aligned} \omega_1 + \cdots, \omega_1^2 + \cdots, \cdots, \omega_1^N + \cdots, \\ \omega_m + \cdots, \omega_m^2 + \cdots, \cdots, \omega_m^N + \cdots \end{aligned}$$

bedeuten. Die Potenzsummen (8) sind sämmtlich dem System (6) angehörige Invarianten.

Was nunmehr den allgemeinen Ausdruck (2) einer Invariante anbetrifft, so erhält derselbe bei Berücksichtigung der Gleichungen (4) und (5) die Gestalt:

$$J = \omega_1^{p_1} \omega_2^{p_2} \cdots \omega_m^{p_m} + \cdots$$

Hieraus erkennen wir leicht nach Eintragung der Werthe (7), dass J eine ganze Function der Invarianten des Systems (6) wird, d. h. die Invarianten (6) bilden ein System von der Beschaffenheit, wie es unser Satz verlangt.

Liegt ein System von beliebig vielen Formen f, g, h, \dots zu Grunde, so ist an Stelle von (2) ein symmetrisches Gebilde zu setzen, dessen

Anfangsglied sämmtliche Determinanten der Linearfactoren von f, g, h, \dots enthält und zwar in der Weise, dass die Coefficienten der zur selben Grundform gehörigen Linearfactoren in demselben Grade auftreten. Diese charakteristische Eigenschaft einer Simultaninvariante findet ihren Ausdruck in einem System diophantischer Gleichungen, welches die Rolle des Gleichungssystems (3) übernimmt. Im Uebrigen gilt genau dieselbe Schlussfolgerung.

Göttingen, den 30. März 1888.
