# Ueber die Endlichkeit des Invariantensystems für binäre Grundformen.

Von

DAVID HILBERT in Königsberg.

---

P. Gordan hat zuerst bewiesen, dass es für ein vorgelegtes System von binären Grundformen eine endliche Zahl von Invarianten giebt, durch welche sich jede andere Invariante jener Grundformen rational und ganz ausdrücken lässt. Im Folgenden wird für diesen fundamentalen Satz ein anderer Beweis erbracht, welcher mit dem ursprünglichen Verfahren von P. Gordan*) nahe Analogieen aufweist, während andererseits der Gedankengang dem von F. Mertens**) gegebenen Beweise parallel läuft.

Der Beweis stützt sich auf die beiden folgenden bekannten und leicht beweisbaren Theoreme:

I.

Ein System von beliebig vielen linearen und homogenen diophantischen Gleichungen besitzt eine endliche Anzahl positiver Lösungen von der Beschaffenheit, dass jede andere positive Lösung sich mit Hülfe positiver ganzzahliger Coefficienten linear und homogen aus jenen zusammensetzen lässt.***)

II.

Bildet man aus $N$ beliebigen Grössen $\omega, \ldots$ die Summe ihrer $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots, N^{\text{ten}}$ Potenzen, wie folgt:

$$\omega + \cdots, \quad \omega^2 + \cdots, \cdots, \quad \omega^N + \cdots$$

und bedeutet $p$ irgend eine positive ganze Zahl, so gilt stets eine Identiät von der Gestalt:

---

*) Vorlesungen über Invariantentheorie. Bd. II, pag. 231.

**) Crelle's Journal Bd. 100, p. 223.

***) Vergl. P. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie. Bd. I, pag. 199.

$$\omega^p = G + G^{(1)}\omega + \cdots + G^{(N-1)}\omega^{N-1}. \tag{1}$$

wo $G, G^{(1)}, \ldots, G^{(N-1)}$ ganze Functionen jener $N$ Potenzsummen sind.

Beide Theoreme sind dem in Rede stehenden Invariantensatze insofern gleichgeartet, als sie ebenso wie jener die Endlichkeit gewisser in sich geschlossener Systeme behaupten. Zugleich weisen wir auf den Umstand hin, dass in beiden Theoremen die charakteristische Reductionsgleichung die einzelnen Glieder des geschlossenen Systems in linearer Weise enthält.

Die vorgelegte Grundform $f$ von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung in den homogenen Variablen $x, y$ stelle man als Product ihrer Linearfactoren dar, wie folgt:

$$f = (\alpha^{(1)}x + \beta^{(1)}y)\,(\alpha^{(2)}x + \beta^{(2)}y) \cdots (\alpha^{(n)}x + \beta^{(n)}y)$$

und benutze die Abkürzung:

$$(k, l) = \alpha^{(k)}\beta^{(l)} - \alpha^{(l)}\beta^{(k)}.$$

Jede Invariante der Form $f$ setzt sich bekanntermassen zusammen aus symmetrischen Gebilden von der Gestalt:

$$J = (1, 2)^{e^{1,2}}(1, 3)^{e^{1,3}}(2, 3)^{e^{2,3}} \cdots (n-1, n)^{e^{n-1,n}} + \cdots, \tag{2}$$

wo man die folgenden Glieder der Summe aus dem hingeschriebenen Anfangsgliede dadurch erhält, dass man die in den Klammern stehenden Zahlen $1, 2, \ldots, n$ auf alle möglichen Weisen permutirt. Ueberdies ist jedoch erforderlich, dass in jenem Anfangsgliede jede der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ gleich oft vorkommt, d. h. es bestehen für die als Potenzexponenten auftretenden positiven ganzen Zahlen nothwendig die Gleichungen:

$$\begin{aligned} & e^{1,2} + e^{1,3} + \cdots + e^{1,n} \\ = \; & e^{2,1} + e^{2,3} + \cdots + e^{2,n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ = \; & e^{n,1} + e^{n,2} + \cdots + e^{n,n-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

wo allgemein $e^{k,l}$ und $e^{l,k}$ dieselben Zahlen sind.

Nach Satz I lässt sich jede positive Lösung der diophantischen Gleichungen (3) aus einer gewissen endlichen Anzahl $m$ von speciellen positiven Lösungen linear und homogen unter Vermittelung ganzzahliger positiver Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ zusammensetzen, wie folgt:

$$\begin{aligned} e^{1,2} &= p_1 e_1^{1,2} + p_2 e_2^{1,2} + \cdots + p_m e_m^{1,2}, \\ e^{1,3} &= p_1 e_1^{1,3} + p_2 e_2^{1,3} + \cdots + p_m e_m^{1,3}, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{n-1,n} &= p_1 e_1^{n-1,n} + p_2 e_2^{n-1,n} + \cdots + p_m e_m^{n-1,n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir bedienen uns der Abkürzungen:

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
\omega_1 &= (1,2)^{e_1^{1,2}}\,(1,3)^{e_1^{1,3}}\,(2,3)^{e_1^{2,3}}\cdots(n-1,n)^{e_1^{n-1,n}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_m &= (1,2)^{e_m^{1,2}}\,(1,3)^{e_m^{1,3}}\,(2,3)^{e_m^{2,3}}\cdots(n-1,n)^{e_m^{n-1,n}},
\end{aligned}
$$

und bilden sämmtliche Invarianten von der Gestalt:

$$
(6)\qquad J_{\pi_1\pi_2\cdots\pi_m} = \omega_1^{\pi_1}\,\omega_2^{\pi_2}\cdots\omega_m^{\pi_m} + \cdots,
$$

wo keiner der Zahlenexponenten $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ die Zahl

$$
N = 1\,.\,2\,.\,3 \ldots n
$$

überschreitet und wo die folgenden Glieder der Summe auf gleiche Weise wie oben in (2) aus dem Anfangsgliede abzuleiten sind.

Aus jedem der $m$ Producte (5) gehen durch Permutation der in den Klammern stehenden Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ noch $N-1$ weitere Ausdrücke hervor; daher gelten, entsprechend der Reductionsformel (1) in Satz II, Gleichungen der folgenden Art:

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
\omega_1^{p_1} &= G_1 + G_1^{(1)}\omega_1 + \cdots + G_1^{(N-1)}\omega_1^{N-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_m^{p_m} &= G_m + G_m^{(1)}\omega_m + \cdots + G_m^{(N-1)}\omega_m^{N-1},
\end{aligned}
$$

wo die Coefficienten $G$ ganze Functionen der Potenzsummen:

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
&\omega_1 + \cdots,\ \omega_1^2 + \cdots,\ \ldots,\ \omega_1^N + \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega_m + \cdots,\ \omega_m^2 + \cdots,\ \ldots,\ \omega_m^N + \cdots
\end{aligned}
$$

bedeuten. Die Potenzsummen (8) sind sämmtlich dem System (6) angehörige Invarianten.

Was nunmehr den allgemeinen Ausdruck (2) einer Invariante anbetrifft, so erhält derselbe bei Berücksichtigung der Gleichungen (4) und (5) die Gestalt:

$$
J = \omega_1^{p_1}\,\omega_2^{p_2}\cdots\omega_m^{p_m} + \cdots
$$

Hieraus erkennen wir leicht nach Eintragung der Werthe (7), dass $J$ eine ganze Function der Invarianten des Systems (6) wird, d. h. *die Invarianten* (6) *bilden ein System von der Beschaffenheit, wie es unser Satz verlangt.*

Liegt ein System von beliebig vielen Formen $f, g, h, \ldots$ zu Grunde, so ist an Stelle von (2) ein symmetrisches Gebilde zu setzen, dessen

Anfangsglied sämmtliche Determinanten der Linearfactoren von $f, g, h, \ldots$ enthält und zwar in der Weise, dass die Coefficienten der zur selben Grundform gehörigen Linearfactoren in demselben Grade auftreten. Diese charakteristische Eigenschaft einer Simultaninvariante findet ihren Ausdruck in einem System diophantischer Gleichungen, welches die Rolle des Gleichungssystems (3) übernimmt. Im Uebrigen gilt genau dieselbe Schlussfolgerung.

Göttingen, den 30. März 1888.